《空间物理学》大作业 *

姓名：王胤杰　　专业：海洋科学　　学号：

使用理想 MHD 方程，根据守恒定律，假设边界厚度无穷小、一维、静态条件下，导出边界条件（R-H 关系）；在此基础上，理解（写出）R-H 条件对磁流体间断面与激波的控制关系。

1　理想 MHD 方程

1.1　质量守恒方程（连续性方程）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

其中，ρ 是密度，$\mathbf{v}$ 是流体速度。

1.2　动量守恒方程（Navier-Stokes 方程）

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g}$$

其中，p 是压力，$\mathbf{j}$ 是电流密度，$\mathbf{B}$ 是磁场，$\mathbf{g}$ 是重力加速度。

1.3　能量守恒方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{\gamma p}{\gamma - 1} \right) \mathbf{v} \right] = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$$

其中，γ 是比热比，$v = |\mathbf{v}|$ 是流速的大小。

---

*

1.4 麦克斯韦方程（在理想 MHD 中简化）

1.4.1 法拉第定律（感应方程）

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$$

1.4.2 安培定律（忽略位移电流）

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

1.4.3 无单极磁场

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

其中，$\mathbf{E}$ 是电场，μ_0 是真空磁导率。

1.5 理想 MHD 条件（欧姆定律的简化）

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

2 守恒定律

2.1 能量守恒定律

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

其中，E 是系统的总能量。这表明在一个封闭系统中，总能量保持不变。

2.2 动量守恒定律

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0}$$

其中，$\mathbf{p}$ 是系统的总动量。在没有外力作用的封闭系统中，总动量保持不变。

2.3 角动量守恒定律

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$$

其中，$\mathbf{L}$ 是系统的总角动量。在没有外力矩作用的情况下，系统的总角动量保持不变。

2.4 质量守恒定律（在非相对论情况下）

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

其中，m 是系统的总质量。在非相对论物理中，系统的质量在没有物质进出的情况下保持不变。

2.5 电荷守恒定律

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

其中，q 是系统的总电荷。在一个封闭系统中，总电荷保持不变。

3 一维、静态条件下的简化

3.1 质量守恒方程的简化

原方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

由于静态条件，$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$。因此，方程简化为：

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

在一维情况下，这进一步简化为：

$$\frac{d}{dx}(\rho v_x) = 0$$

这意味着沿 x 轴的质量流是恒定的。

3.2 动量守恒方程的简化

原方程：

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

由于静态条件，$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$。因此，方程简化为：

$$\rho (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

在一维情况下，这进一步简化为：

$$\rho v_x \frac{dv_x}{dx} = -\frac{dp}{dx} + j_y B_z - j_z B_y$$

这表示沿 x 轴的动量流是恒定的。

3.3 能量守恒方程的简化

原方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{p}{\gamma-1}\right)+\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{\gamma p}{\gamma-1}\right)\mathbf{v}\right]=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})$$

在静态条件下，时间导数项为零。因此，方程简化为：

$$\nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\frac{\gamma p}{\gamma-1}\right)\mathbf{v}\right]=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{B})$$

在一维情况下，这进一步简化为：

$$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v_x^2+\frac{\gamma p}{\gamma-1}\right)v_x\right]=v_x(j_yB_z-j_zB_y)$$

这表示沿 x 轴的能量流是恒定的。

3.4 磁感应方程的简化

原方程：

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

在静态条件下，时间导数项为零。因此，方程简化为：

$$\nabla\times(\mathbf{v}\times\mathbf{B})=0$$

在一维情况下，这意味着磁场沿 x 轴的分量是恒定的。

4 Rankine-Hugoniot 条件的推导

首先我们将简化的方程写作积分形式，然后我们会应用这些守恒方程到一个假设的间断面，这个间断面是一个界限，它将流体分成两部分。我们将使用下面的符号：

- 下标 1 表示间断面一侧（通常是激波前的）的物理量。
- 下标 2 表示间断面另一侧（通常是激波后的）的物理量。
- u_n 表示流速在间断面法线方向的分量。
- B_n 和 B_t 分别表示磁场在间断面法线和切线方向的分量。
- ρ 是密度，p 是压强，μ_0 是真空磁导率，γ 是比热比。

将这些方程应用到间断面两侧，考虑到间断面的特殊性，即物理量在通过间断面时会发生突变。在这里，方括号 [] 表示取间断面两侧值的差，比如 $[X]=X_2-X_1$。

4.1 质量守恒（Conservation of Mass Flux）

$$\rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) = \text{constant}$$

在间断面两侧应用质量守恒，我们得到:

$$\rho_1 u_{n1} = \rho_2 u_{n2}$$

这意味着穿过间断面的质量流量是守恒的。即:

$$[\rho(u_n)] = 0$$

4.2 动量守恒（Conservation of Momentum Flux）

动量守恒方程在 MHD 中包含流体压力和磁压力，表示为:

$$\rho(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{u} + (p + \frac{B^2}{2\mu_0})\mathbf{n} - \frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})\mathbf{B}}{\mu_0} = \text{constant}$$

将这个方程应用到间断面，我们得到:

$$\rho_1 u_{n1}^2 + p_1 + \frac{B_{t1}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{n1}^2}{\mu_0} = \rho_2 u_{n2}^2 + p_2 + \frac{B_{t2}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{n2}^2}{\mu_0}$$

因为 $B_{n1} = B_{n2}$ （由后文 Maxwell 方程得出），所以动量守恒方程可以写为:

$$[\rho u_n u + (p + \frac{B_t^2}{2\mu_0})\mathbf{n} - \frac{B_n B_t}{\mu_0}\mathbf{t}] = 0$$

这里 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{t}$ 分别表示间断面的法线和切线方向。

4.3 能量守恒（Conservation of Energy Flux）

能量守恒方程在 MHD 中表示为:

$$\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) - \frac{(\mathbf{B}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})}{\mu_0} = \text{constant}$$

通过类似的方法，我们将这个方程应用到间断面，得到:

$$\left[u_n\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}p + \frac{B^2}{\mu_0}\right) - \frac{B_n(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})}{\mu_0}\right] = 0$$

4.4 麦克斯韦方程

麦克斯韦方程中，我们主要关注的是磁场的无散度条件和感生电动势的守恒。在一个理想 MHD 中，电场 $\mathbf{E}$ 可以由 $\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0$ 表示。在间断面，我们得到:

$$[u_n B_t - B_n u_t] = 0$$

$$[B_n] = 0$$

此刻，我们导出了 Rankine-Hugoniot 条件：对于一个沿着 x 轴移动的间断面，我们有：

$$\begin{cases} [\rho u_n] = 0 & \text{(质量通量守恒)} \\ [\rho u_n \mathbf{u} + \left(p + \dfrac{B_t^2}{2\mu_0}\right)\mathbf{n} - \dfrac{B_n \mathbf{B}_t}{\mu_0}] = 0 & \text{(动量通量守恒)} \\ \left[u_n \left(\dfrac{1}{2}\rho \mathbf{u}^2 + \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}p + \dfrac{B_t^2}{\mu_0}\right) - \dfrac{B_n(\mathbf{u}\cdot\mathbf{B})}{\mu_0}\right] = 0 & \text{(能量通量守恒)} \\ [u_n \mathbf{B}_t - B_n \mathbf{u}_t] = 0 & \text{(麦克斯韦方程——磁场)} \\ [B_n] = 0 & \text{(麦克斯韦方程——磁场无散度)} \end{cases}$$

5 改写 R-H 条件

5.1 定义平均值

在研究磁流体动力学（MHD）不连续性时，我们通常对比不连续面两侧的物理量。不连续面上的物理量，如密度、压力、速度等，在穿过间断面时会发生突变，这些突变可以通过跳变条件（也称为 Rankine-Hugoniot 条件）来描述。

为了量化这些变化，我们定义一个物理量 X 在不连续面上的平均值 $\langle X \rangle$：

$$\langle X \rangle = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$$

这里 X_1 和 X_2 分别代表不连续面一侧和另一侧的 X 的值。平均值 $\langle X \rangle$ 提供了一种衡量间断面两侧物理状态的简便方法，它在数学上便于处理不连续性问题，也有助于在物理上理解间断面两侧的相互作用。

5.2 乘积的跳变分解

在处理不连续面上物理量的跳变时，还需要考虑物理量乘积的变化。跳变的数学表达涉及到不连续面两侧的差值，即如果有一个物理量 X 在间断面两侧的值分别为 X_1 和 X_2，那么它的跳变定义为 $[X] = X_2 - X_1$。当考虑两个物理量 A 和 B 的乘积时，其跳变可以通过以下方式分解：

$$[AB] = [A][B] + \langle A \rangle \langle B \rangle$$

乘积 AB 在不连续面上的跳变不仅包括 A 和 B 各自的跳变的乘积 $[A][B]$，而且还包括 A 和 B 在不连续面两侧平均值的乘积 $\langle A \rangle \langle B \rangle$。

5.3 比容与法向质量流量的定义

比容 τ，定义为密度 ρ 的倒数，是描述等离子体或流体单位质量所占体积大小的物理量。比容反映了流体的可压缩程度，也常用于等离子体的状态方程中：

$$\tau = \frac{1}{\rho}$$

法向质量流量 F 表征了单位时间内通过不连续面单位面积的质量，它是描述不连续面两侧物质交换的重要物理量。这里 u_n 是流体速度在不连续面法线方向的分量，表征了流体通过不连续面的速度：

$$F = \rho u_n$$

5.4 重写 R-H 条件

给定之前定义的比容 τ 和法向质量流量 F, 我们可以利用这些量来重写经典的 R-H 条件。这些条件表达了在不连续面上守恒量的跳变，它们是由以下方程给出：

5.4.1 重写质量守恒

由 F 的定义，我们可以将 ρu_n 表达为 F。接着，用 τ 替换 ρ 为 $\frac{1}{\tau}$，得到：

$$[F] = [\frac{1}{\tau} u_n] = 0$$

由于 F 是守恒的，不连续面两侧的 F 是相同的，因此可以取消掉 F。剩下的是 τ 和 u_n 的跳变。

我们知道 F 在两侧是相等的，所以 $[F] = 0$，并且 $F = \frac{1}{\langle\tau\rangle}$。代入 F 的表达式，我们得到：

$$F\langle\tau\rangle - [u_n] = 0$$

这里 $\langle\tau\rangle$ 表示不连续面两侧比容的平均值。

综上，方程 $F\langle\tau\rangle - [u_n] = 0$ 从质量守恒的 R-H 条件导出，其中 F 代表的是不连续面两侧守恒的法向质量流量，而 $\langle\tau\rangle$ 是两侧比容的平均值。这个方程反映了在不连续面上，即使密度和速度可能有跳变，但质量流量守恒。

5.4.2 重写动量守恒

在不连续面两侧，F 是守恒的，因此我们可以将 ρu_n 替换为 F。

在不连续面两侧，速度 $\mathbf{u}$ 可能不同。我们引入平均速度 $\langle\mathbf{u}\rangle$ 来表示不连续面两侧速度的平均值。因此，$\rho u_n \mathbf{u}$ 可以用 $F\langle\mathbf{u}\rangle$ 表示。

原始方程中的磁场项 $\frac{B_t^2}{2\mu_0}\mathbf{n} - \frac{B_n \mathbf{B}_t}{\mu_0}$ 描述了磁场对动量的贡献。我们将其分解为两部分：磁场跳变的影响 $\frac{1}{\mu_0}(\langle\mathbf{B}\rangle \cdot [\mathbf{B}])\mathbf{n}$ 和磁场法向分量的影响 $-\frac{1}{\mu_0} B_n [\mathbf{B}]$。

将上述分析结果合并，我们得到：

$$F\langle\mathbf{u}\rangle + [p]\mathbf{n} + \frac{1}{\mu_0}(\langle\mathbf{B}\rangle \cdot [\mathbf{B}])\mathbf{n} - \frac{1}{\mu_0} B_n [\mathbf{B}] = 0$$

这个方程反映了在理想 MHD 条件下不连续面上动量守恒的全面描述。其中，$F\langle \mathbf{u} \rangle$ 表达了法向质量流量与平均速度的乘积，

$$[p]\mathbf{n}$$

表示压力的跳变，而最后两项则考虑了磁场的贡献。

5.4.3 重写磁场守恒

将 u_n 替换为 $\frac{F}{\rho}$ 并考虑 $\tau = \frac{1}{\rho}$，我们将原始方程重写为：

$$[F\tau \mathbf{B}_t - B_n \mathbf{u}_t] = 0$$

根据跳变和平均值的原则,我们可以将任何两个量的跳变重写为 $[AB] = [A]\langle B \rangle + \langle A \rangle [B]$。应用这一原则，我们得到：

$$F[\tau \mathbf{B}_t] = F([\tau]\langle \mathbf{B}_t \rangle + \langle \tau \rangle [\mathbf{B}_t])$$

$$B_n[\mathbf{u}_t] = B_n \langle \mathbf{B}_t \rangle [\mathbf{u}_t]$$

将上述两部分合并，我们得到：

$$F([\tau]\langle \mathbf{B}_t \rangle + \langle \tau \rangle [\mathbf{B}_t]) - B_n \langle \mathbf{B}_t \rangle [\mathbf{u}_t] = 0$$

进一步简化上述方程，我们得到：

$$F\langle \tau \rangle [\mathbf{B}_t] + (\langle \mathbf{B}_t \rangle [u_n]) - B_n[\mathbf{u}_t] = 0$$

$$\begin{cases} F\langle \tau \rangle - [u_n] = 0, & \text{(法向质量流量守恒)} \\ F\langle \mathbf{u} \rangle + [p]\mathbf{n} + \dfrac{1}{\mu_0}(\langle \mathbf{B} \rangle \cdot [\mathbf{B}])\mathbf{n} - \dfrac{1}{\mu_0} B_n[\mathbf{B}] = 0, & \text{(动量守恒方程)} \\ F(\langle \tau \rangle [\mathbf{B}]) + (\langle \mathbf{B} \rangle [u_n]) - B_n[\mathbf{u}] = 0, & \text{(磁场守恒方程)} \\ [B_n] = 0. & \text{(磁场法向分量守恒)} \end{cases}$$

6 构建等离子体中的不连续性方程

6.1 构建约束方程

现在我们将跳变变量视为未知数，并构建约束方程 F，以确保上述方程组有非零解，这是通过因式分解方法实现的。

首先假设 $F = 0$，这会导致 $u_n = 0$ 和 $[u_n] = 0$，方程自然得到满足。同时，由于 $[B_n] = 0$,，磁场的法向分量在不连续面上没有跳变。简化为：

6.1.1 简化动量守恒方程

在 $F=0$ 的假设下，即 $u_n=0$ 和 $[u_n]=0$，方程简化为 $[p\mathbf{n}]+\frac{1}{\mu_0}[\mathbf{BBn}]=0$。

由于 $[B_n]=0$，所以 $[\mathbf{BBn}]=\langle\mathbf{B}\rangle\cdot[\mathbf{B}]\mathbf{n}$。

得到 $[p]+\frac{1}{\mu_0}\langle\mathbf{B}\rangle\cdot[\mathbf{B}]=0$。

6.1.2 简化磁场法向分量守恒

由于 $[B_n]=0$，这意味着不连续面两侧的磁场法向分量没有变化。对于切向分量 $\mathbf{B}_t$，由于 B_n 是恒定的，$B_n[\mathbf{B}_t]=0$。

并且考虑到磁场与速度的相互作用，我们得出 $B_n[\mathbf{u}_t]=0$。

这表明，即使速度的切向分量 $\mathbf{u}_t$ 可能在不连续面上发生变化，它们与磁场法向分量的乘积仍然是守恒的。

$$\begin{cases}[p]+\dfrac{1}{\mu_0}\langle\mathbf{B}\rangle\cdot[\mathbf{B}]=0, & \text{(压力和磁场跳变关系)}\\ B_n[\mathbf{B}_t]=0, & \text{(磁场切向分量守恒)}\\ B_n[\mathbf{u}_t]=0, & \text{(速度切向分量守恒)}\end{cases}$$

6.2 切向不连续性与接触不连续性

当磁场的法向分量 $B_n=0$ 时，即磁场完全平行于不连续面，我们遇到所谓的切向不连续性。在这种情况下，磁场和速度的切向分量 $[\mathbf{B}_T]$ 和 $[\mathbf{V}_T]$ 可以任意变化，同时压力 $[p]$ 与磁场的关系可以表示为 $[p]=-\frac{1}{\mu_0}\langle\mathbf{B}\rangle\cdot[\mathbf{B}]=-\frac{1}{2\mu_0}[\mathbf{B}^2]$。这意味着虽然磁场和流速在切向上可以变化，但总压力（热压力和磁压力的和）保持不变。

另一方面，当 $B_N\neq 0$ 时，即存在磁场的法向分量，我们面对的是接触不连续性。在这种情况下，场和流动矢量在不连续面上不发生变化，这意味着 $[p]=0$。然而，等离子体的密度和温度可能在不连续面两侧发生变化。

6.3 旋转不连续性

接下来让我们考虑 $F\neq 0$ 的情况。考虑法向速度的跳变 $[u_n]$ 和切向速度的跳变 $[\mathbf{u}_t]$。已知:$[u_n]=F[\tau]$ 和 $[\mathbf{u}_t]=-\frac{B_n}{F\mu_0}[\mathbf{B}_T]$。

将 $[u_n]=F[\tau]$ 代回动量守恒方程由于 $[u_n]$ 是流速在法线方向的跳变，因此 $F\langle\mathbf{u}\rangle$ 中的 $\mathbf{u}$ 对应于 u_n 的跳变，所以 $F\langle\mathbf{u}\rangle$ 变成 $F^2[\tau]$。因此，方程简化为

$$F^2[\tau]+[p]+\frac{1}{\mu_0}(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot[\mathbf{B}])=0$$

将 $[\mathbf{u}_t]=-\frac{B_n}{F\mu_0}[\mathbf{B}_T]$。这里 $[\mathbf{u}_t]$ 代回磁场守恒方程，其为速度在切线方向的跳变，与 $[\mathbf{B}_T]$ 相关联。由此，$B_n[\mathbf{u}]$ 中的 $[\mathbf{u}]$ 对应于 $[\mathbf{u}_t]$，因此变为 $-\frac{B_n^2}{F\mu_0}[\mathbf{B}_T]$。所以，方程变为

$$F^2[\tau]+\frac{1}{\mu_0}(\langle\mathbf{B}\rangle\cdot[\mathbf{B}])-\frac{B_n^2}{\mu_0}[\mathbf{B}_T]=0$$

并整理，得到

$$\left(F^2-\frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right)[\mathbf{B}_t]+F^2\frac{[\tau]}{\langle\tau\rangle}\langle\mathbf{B}_t\rangle=0$$

这样，我们就得到了所需的两个方程，描述了不连续面上的物理现象。

$$\begin{cases} F^2[\tau]+[p]+\dfrac{1}{\mu_0}\langle\mathbf{B}\rangle\cdot[\mathbf{B}]=0, & \text{(重写的质量和磁场守恒方程)} \\ \left(F^2-\dfrac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right)[\mathbf{B}_t]+F^2\dfrac{[\tau]}{\langle\tau\rangle}\langle\mathbf{B}_t\rangle=0, & \text{(重写的磁场和速度切向分量守恒方程)} \end{cases}$$

如果 $F^2-\frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}=0$，且 $[t]$ 等于或不等于 0，我们总能得到非零解。在 $F^2-\frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}=0$ 和 $[t]=0$ 的情况下，得到 $[V_T]=[B_T]$，这表明切向速度和磁场向量必须一起旋转。因此，这种不连续性被称为旋转不连续性。

6.4 激波

最后，我们关注 $F^2-\frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\neq 0$ 的情况，此时方程 $\left(F^2-\frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right)[\mathbf{B}_t]+F^2\frac{[\tau]}{\langle\tau\rangle}\langle\mathbf{B}_t\rangle=0$ 给出如下结果。

$$[\mathbf{B}_t]=\frac{F^2\mu_0\langle\tau\rangle}{B_n^2-F^2\mu_0\langle\tau\rangle}\langle\mathbf{B}_t\rangle$$

将其代入方程 $F^2[\tau]+[p]+\frac{1}{\mu_0}\langle\mathbf{B}\rangle\cdot[\mathbf{B}]=0$，我们得到：

$$F^2[\tau]+[p]+\frac{F^2\tau}{B_n^2-F^2\mu_0\langle\tau\rangle}[\mathbf{B}_t^2]=0$$

将其乘以 $B_n^2-F^2\mu_0\langle\tau\rangle$ 并重新排列，它变成：

$$F^4+F^2\left(\frac{[P]}{[\tau]}-\frac{\langle\mathbf{B}_t\rangle^2+B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right)-\frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\frac{[P]}{[\tau]}=0.$$

这里 $\langle\mathbf{B}_t\rangle^2+B_n^2=\langle B\rangle^2$。上述方程中 $[\tau]\neq 0$ 的解是激波。得到以下方程：

$$F\left(F^2-\frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right)\left(F^4+F^2\left[\frac{[p]}{[\tau]}-\frac{\langle\mathbf{B}\rangle^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right]-\frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\frac{[p]}{[\tau]}\right)=0 \tag{1}$$

7 R-H 条件对磁流体间断面与激波的控制关系

在磁流体动力学中，Rankine-Hugoniot 条件描述了不同类型的不连续性中各物理量如何变化。其中 F 代表法向质量流量，B_n 是磁场的法向分量，$\langle p\rangle$ 和 $\langle B\rangle$ 分别代表压力和磁场的平均值。这个方程用来确定不同不连续性类型的条件。

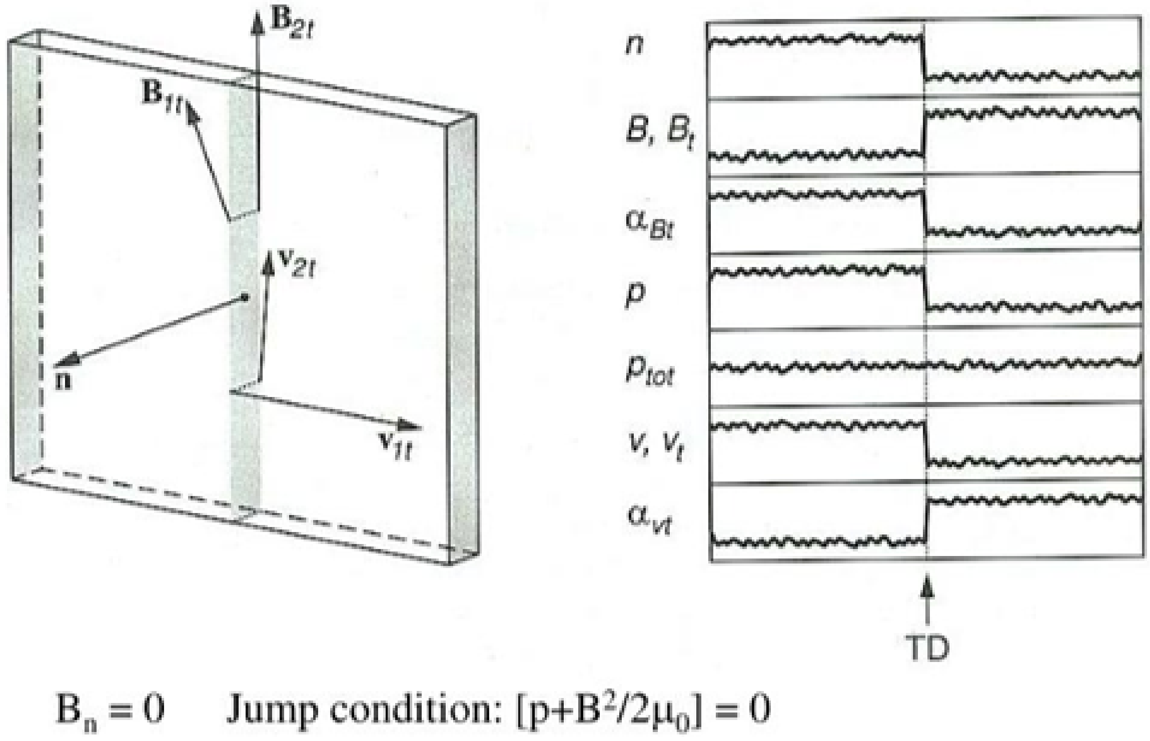

Figure 1: 切向不连续性示意图

7.1 切向不连续性

在磁流体动力学（MHD）中，切向不连续性或接触不连续性是一种特殊的情形，它描述了两种流体相接触但不混合，且在接触面上没有法向的质量流动（$u_n = 0$），同时在该面上磁场的法向分量（B_n）保持不变。

根据给定的方程：

$$F\left(F^2 - \frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right)\left(F^4 + F^2\left[\frac{[p]}{[\tau]} - \frac{\langle\mathbf{B}\rangle^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right] - \frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\left[\frac{[p]}{[\tau]}\right]\right) = 0$$

当 $F = 0$ 时，我们可以认定存在一种切向不连续性。在这种情况下，等离子体的压力和密度在不连续面两侧可能是相同的，但磁场的切向分量和流速的切向分量可能会变化。由于没有法向速度，所以没有物质穿过不连续面，但磁场的变化仍然会影响流体动力学行为。

图像中展示的跳跃条件 $[p + B^2/2\mu_0] = 0$ 揭示了切向不连续面的另一个特性：即使压力和磁场强度的变化可能抵消了彼此的影响，仍然没有物质的跨界面流动，这通常在太阳风中的磁通量管界面或行星磁层边界等场合观察到。在这些情况下，即便压力和磁场的变化在数值上能够抵消，但磁场的方向和/或大小的变化依然可以发生，从而导致了切向不连续性的形成。

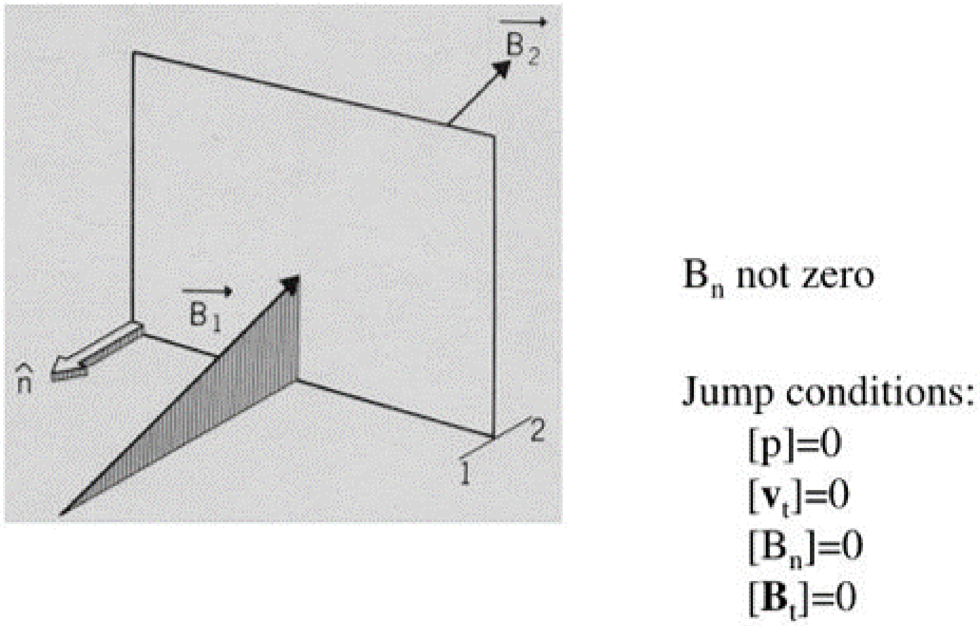

Figure 2: 接触不连续性示意图

7.2 接触不连续性

接触不连续性（Contact Discontinuity）是在流体之间存在一个界面，在这个界面上物质的性质（如温度和密度）会发生变化，但是压力和速度保持连续。在接触不连续性的情况下，界面两侧的法向磁场 B_n 保持不变，但是界面是不允许有物质流通过的，即法向速度 $u_n = 0$。

接触不连续性之所以不稳定，主要是因为在两种不同性质的流体接触的界面上，即使在没有法向速度流动的情况下，仍然存在微小扰动增长的可能性。这种扰动可以由凯尔文-亥姆霍兹不稳定性引起，当两侧流体的切向速度存在差异时，会导致界面波动并形成涡旋。此外，当考虑磁流体动力学效应时，磁场的存在可能会增加系统的复杂性，从而影响不连续面的稳定性。

根据方程：

$$F\left(F^2 - \frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right)\left(F^4 + F^2\left[\frac{[p]}{[\tau]} - \frac{\langle\mathbf{B}\rangle^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\right] - \frac{B_n^2}{\mu_0\langle\tau\rangle}\left[\frac{[p]}{[\tau]}\right]\right) = 0$$

在 $F = 0$ 的情况下，表明不存在沿法线方向的质量流，这与接触不连续性的条件相符合。方程的其他部分描述了在存在法向磁场的情况下，激波和其他类型的不连续性如何形成。在接触不连续性界面上，即使没有物质的流动，但由于切向速度或磁场的微小扰动也足以导致不稳定性。接触不连续面在流体动力学中通常被认为是不稳定的，这是由于它们容易受到周围流体动力学条件变化的影响。这种不稳定性可以通过凯尔文-亥姆霍兹不稳定性（Kelvin-Helmholtz instability）来解释，当两种流体以不同速度平行流动时，它们之间的界面可能变得波动，从而导致涡流的形成。在宇宙等离子体的环境中，如太阳风中的接触不连续面，由于周围环境中磁场和粒子流的不断变化，这种不稳定性

尤为明显。此外，界面两侧的压力差异和磁场的差异也可能加剧这种不稳定性。

7.3 旋转不连续性

旋转不连续性（Rotational Discontinuity, RD）是等离子体中一种特殊的磁流体动力学现象。它属于磁重联过程中的一种基本结构，在许多天体物理环境中都能观测到，如太阳风和地球磁层。RD 的主要特征是，在等离子体中存在一个面，在这个面上的物理量发生了特定的变化，而等离子体的密度和压力保持连续。

在理想磁流体动力学中，旋转不连续性可以用以下条件来描述：

1. 密度 $[n]$ 和压力 $[p]$ 在不连续面两侧保持连续，即变化为零。这可以表示为：

$$[n] = 0, \quad [p] = 0$$

2. 正常于不连续面的磁场分量 B_n 保持连续，而切向分量 B_t 可以发生旋转，但其模长保持不变。因此，B_n 和 B_t 满足以下条件：

$$[B_n] = 0, \quad [B^2] = 0$$

3. 正常于不连续面的速度分量 v_n 保持连续，切向速度分量 v_t 可以改变。这种变化满足：

$$\left[v_t - \frac{B_t}{\sqrt{nm\mu_0}} \right] = 0$$

其中 n 代表粒子数密度，m 代表粒子质量，μ_0 是真空磁导率。

4. 上述 v_t 的变化实际上对应于 Alfvén 波的传播，此时 v_n 和 B_n 的连续性导出了 Walen 关系：

$$v_n = \frac{B_n}{\sqrt{nm\mu_0}}$$

RD 中的物理意义是，等离子体的切向速度和磁场在不连续面上发生了结构上的旋转，但没有伴随物质的交换或者密度和压力的变化。这种结构在太阳风中特别常见，尤其是在快速太阳风区域，它们可以被视为太阳风动态过程中的一种“指纹”，对研究太阳风的起源、结构以及与地球磁层相互作用的过程有着重要的意义。

7.4 激波

7.4.1 激波

激波（shock wave）是流体动力学中一种非常重要的非连续现象，它发生在流体的密度、温度、压力、速度等性质在极短距离内发生急剧变化的区域。激波被描述为具有非零的正常质量流量 F，这意味着物质并没有沿着激波前后静止，而是有一个质量流通量。激波的形成可以用一个双二次方程来描述，该方程考虑了磁场 B 和比体积 V 的变化。方程如下：

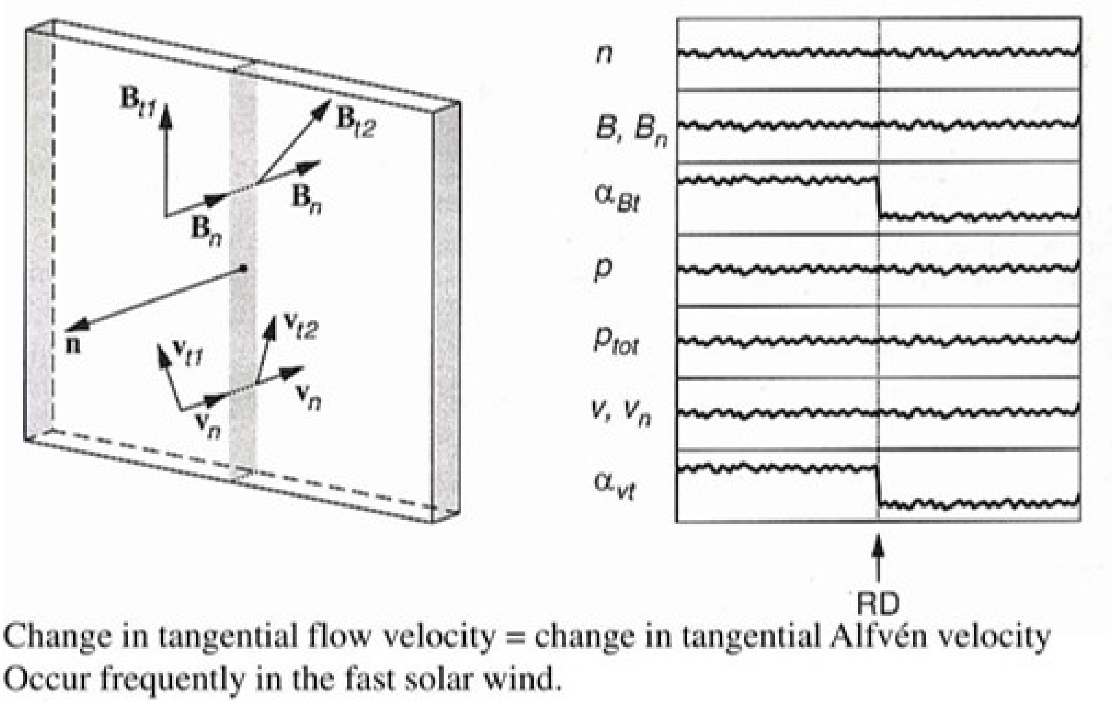

Figure 3: 旋转不连续性示意图

$$F_{III}^4 + F_{II}^2 \left(\frac{[p]}{[V]} - \frac{\langle B^2 \rangle}{\mu_0 \langle V \rangle} \right) - \frac{\langle B_n^2 \rangle}{\mu_0 \langle V \rangle} \frac{[p]}{[V]} = 0$$

这里，方括号表示跨越激波前后的物理量的变化，例如压力 p 和比体积 V。

行星际激波的特征，其中包括快激波（Fast Forward，FF）和慢激波（Slow Forward，SF）。激波的类型取决于它们的速度以及与周围介质的相互作用。图中还展示了激波前后的磁场、密度、温度和速度的变化。这些图表说明了激波是如何在流体中传播的，以及它们的性质如何随时间变化。

对于激波的形成条件，特定的不等式必须满足：

$$\frac{\langle B^2 \rangle}{\mu_0 \langle V \rangle} > \frac{[p]}{[V]}$$

这个条件通常在压力和比体积在激波前后变化方向相反时容易满足，这种变化导致了激波的形成。

7.4.2 马赫数

马赫数是流体动力学中一个关键概念，用来衡量流体中的对象速度与周围介质声速的比值。在不同的马赫数下，流体的行为会有显著不同：

- 亚音速（Mach $<$ 1：物体速度小于声速，扰动可以向所有方向传播。
- 音速（Mach $=$ 1）：物体速度等于声速，扰动的传播速度与物体速度相匹配。

- 超音速（Mach > 1）：物体速度超过声速，扰动只能在物体后方的锥形区域内传播，这种现象称为马赫锥。

另外有几个特征速度：

- 有效阿尔芬速度 U_A：这是磁场对流体流动的影响。公式 $U_A^2 = \langle B^2 \rangle / \mu_0 \rho$ 将速度与磁场强度 B 和流体密度 ρ 相关联。
- 有效声速 C_S：它是传统意义上的声速，但是在等离子体物理学中，它还考虑了磁场的影响。公式 $C_S^2 = -(\gamma P/\rho)$ 中的 γ 是比热比，P 是压强。
- 有效冲击波速度 U：它代表冲击波的传播速度，由公式 $U = F/\rho$ 定义，其中 F 是正常质量流量。

在这些速度的基础上，定义了一个分散方程（dispersion equation），它是一个关于 U 的四阶多项式。这个方程的解决方案代表了可能的波速，分为快速和慢速磁声波速度 U_f 和 U_s。相关的马赫数由 $M_{f,s} = U/U_{f,s}$ 定义，这里 U 是物体的速度，而 $U_{f,s}$ 是波的速度。

7.4.3 快激波与慢激波

在磁流体动力学中，快速激波和慢速激波的区分可通过考虑激波前后磁场、速度、压力等物理量的变化来进行。根据所给的公式和描述，这里的 F 代表了流体通过间断面的法线速度的变化率，而 $\langle \tau \rangle$ 表示平均的热动力学温度。

快激波通常具有以下特点：

1. 激波前后的磁场压力增加，即 $[\mathbf{B}^2] > 0$。

2. 激波的法线速度远大于特定阈值 $(\gamma - 1)H$，这里 H 可能与上述公式中的 $\langle \tau \rangle$ 相关。 慢激波的特点包括：

1. 磁场压力减小，即 $[\mathbf{B}^2] < 0$。

2. 法线速度小于 $(\gamma - 1)H$。

公式中 F^2 与 $\frac{B_n^2}{\mu_0 \langle \tau \rangle}$ 的比较可以用来判断激波的类型。如果 F^2 大于 $\frac{B_n^2}{\mu_0 \langle \tau \rangle}$，则更可能是快激波；反之，则可能是慢激波。此外，公式中的 F^4 项可能代表了流体动力学和磁流体动力学压力的相互作用，这也会影响激波的类型。实际的辨析需要具体的数值和参数条件来确定。

参考文献

[1] 马克思 · 普朗克研究所课程 PPT

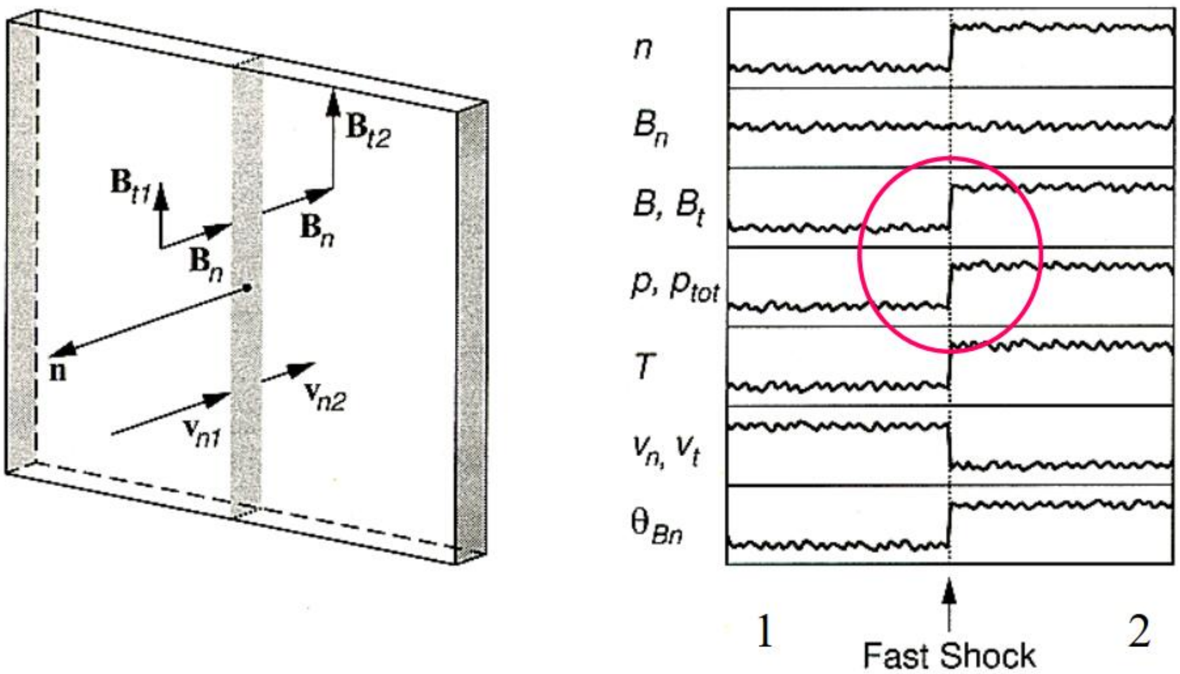

Figure 4: 快激波示意图

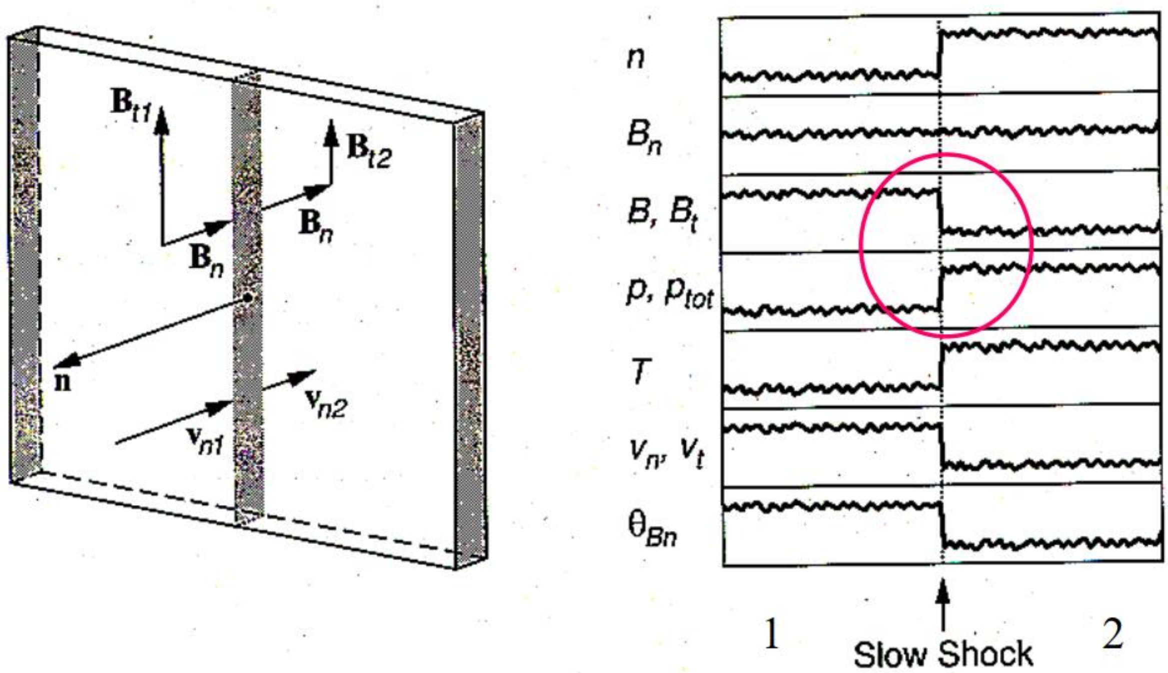

Figure 5: 慢激波示意图